Томъ II. Листъ 11 и 12.

ВѢСТНИКЪ МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ.

№ 35 и 36.

I.

ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ИЗЛОЖЕНIЕ ТЕОРIИ ОПРЕДѢЛИТЕЛЕЙ.

(продолженiе, см. № 30 и 31).

§ 5. Умноженiе опредѣлителей.

Разсмотримъ двѣ системы уравненiй:

$$\left.\begin{aligned} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 &= k_1 \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 &= k_2 \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\; (1)$$

и

$$\left.\begin{aligned} b_{1,1}\,y_1 + b_{1,2}\,y_2 &= x_1 \\ b_{2,1}\,y_1 + b_{2,2}\,y_2 &= x_2 \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\; (2)$$

Ежели изъ этихъ двухъ системъ уравненiй пожелаемъ вывести величины $y_1\ y_2$ посредствомъ

$$a_{1,1}\ a_{1,2}\ .\ .\ .\ b_{1,1}\ b_{1,2}\ .\ .\ .\ k_1 \text{ и } k_2$$

то можемъ поступить двоякимъ образомъ: или подставивъ величины x_1 и x_2 изъ (2)-ой системы въ уравненiя (1)-ой системы и рѣшить сiи послѣднiя относительно y_1 и y_2; или сперва рѣшить (1)-ыя уравненiя относительно x_1 и x_2, подставить найденныя величины во (2)-ыя, и полученныя такимъ образомъ уравненiя рѣшить относительно y_1 и y_2. Изъ тождества величинъ для y_1 и y_2, полученныхъ первымъ и вторымъ прiемомъ легко выводится законъ умноженiя опредѣлителей.

Совершивъ дѣйствiе первымъ способомъ, получимъ:

$$(a_{1,1}\ b_{1,1} + a_{1,2}\ b_{2,1})\ y_1 + (a_{1,1}\ b_{1,2} + a_{1,2}\ b_{2,2})\ y_2 = k_1$$
$$(a_{2,1}\ b_{1,1} + a_{2,2}\ b_{2,1})\ y_1 + (a_{2,1}\ b_{1,2} + a_{2,2}\ b_{2,2})\ y_2 = k_2$$

откуда, величины y_1 и y_2 будутъ имѣть общимъ знаменателемъ опредѣлитель:

$$(3)\quad \begin{vmatrix} a_{1,1}\ b_{1,1} + a_{1,2}\ b_{2,1} & a_{1,1}\ b_{1,2} + a_{1,2}\ b_{2,2} \\ a_{2,1}\ b_{1,1} + a_{2,2}\ b_{2,1} & a_{2,1}\ b_{1,2} + a_{2,2}\ b_{2,2} \end{vmatrix} = R\,.$$

Совершая дѣйствiе по второму способу, получимъ сперва для величинъ x_1 и x_2 изъ (1) уравненiй опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = P$$

и ежели подставимъ величины x_1 и x_2 въ уравненiя (2) и уничтожимъ знаменателей во вторыхъ частяхъ, то получимъ

$$P\,b_{1,1}\ y_1 + P\,b_{1,2}\ y_2 = P'$$
$$P\,b_{2,1}\ y_1 + P\,b_{2,2}\ y_2 = P''\ ;$$

откуда y_1 и y_2 будутъ имѣть общимъ знаменателемъ опредѣлитель:

$$\begin{vmatrix} P\,b_{1,1} & P\,b_{1,2} \\ P\,b_{2,1} & P\,b_{2,2} \end{vmatrix} = P^2 b_{1,1}\ b_{2,2} - P^2 b_{1,2}\ b_{2,1} =$$

$$P^2\,(b_{1,1}\ b_{2,2} - b_{1,2}\ b_{2,1}) = P^2 \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{vmatrix} = P^2.\,\varphi$$

(обозначивъ для краткости опредѣлитель $\begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{vmatrix}$ чрезъ φ).

Но такъ какъ и въ числителяхъ выраженiй для y_1 и y_2 будетъ входить общимъ множителемъ P, то сокращая на P, получимъ общiй знаменатель для y_1 и y_2

$$P\,.\,\varphi = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{vmatrix}$$

по тождественности должно быть

$$R = P \, . \, \varphi \quad , \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (4)$$

что и составляетъ формулу для произведенія опредѣлителей втораго порядка.

Легко замѣтить, что элементы, составляющіе одну линію въ опредѣлителѣ R, суть суммы произведеній элементовъ одной линіи опредѣлителя P на элементы разныхъ линій опредѣлителя φ.

Подобнымъ образомъ изъ двухъ системъ опредѣленныхъ линейныхъ уравненій съ n неизвѣстными выводится формула для произведенія двухъ опредѣлителей n-ого порядка, а именно:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \ldots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \ldots & b_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \ldots & b_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \ldots & c_{1,n} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \ldots & c_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \ldots & c_{n,n} \end{vmatrix} \qquad (5)$$

въ которой $c_{i,k}$ опредѣляется одною изъ суммъ:

$$\left.\begin{array}{l} a_{i,1}\, b_{k,1} + a_{i,2}\, b_{k,2} + \ldots + a_{i,n}\, b_{k,n} \\ a_{i,1}\, b_{1,k} + a_{i,2}\, b_{2,k} + \ldots + a_{i,n}\, b_{n,k} \\ a_{1,i}\, b_{1,k} + a_{2,i}\, b_{2,k} + \ldots + a_{n,i}\, b_{k,n} \\ a_{1,i}\, b_{k,1} + a_{2,i}\, b_{k,2} + \ldots + a_{n,i}\, b_{k,n} \end{array}\right\} . \qquad (6)$$

Находя по предъидущей формулѣ произведеніе:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \ldots & A_1^n \\ A_2^1 & A_2^2 & \ldots & A_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n^1 & A_n^2 & \ldots & A_n^n \end{vmatrix} .$$

замѣчаемъ, что такъ какъ

$$a_{1,s} A_1^s + a_{2,s} A_2^s + \ldots + a_{n,s} A_n^s = D = \Sigma \pm (a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n})$$
$$a_{1,p} A_1^s + a_{2,p} A_2^s + \ldots + a_{n,p} A_n^s = 0 \; ,$$

а посему выйдетъ:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & \ldots & A_1^n \\ A_2^1 & A_2^2 & \ldots & A_2^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n^1 & A_n^2 & \ldots & A_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & D & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & D \end{vmatrix}$$

или

$$D \, . \, \Sigma \pm (A_1^1\, A_2^2 \ldots A_n^n) = D^n \quad ;$$

откуда $$\Sigma \pm (A_1^1\, A_2^2 \ldots A_n^n) = D^{n-1} \, . \qquad (7)$$

Это весьма важное уравненіе вывелъ Коши.

Если называть систему

$$\Sigma \pm (A_1^1\, A_2^2 \ldots A_n^n)$$

дополнительною системою системы

$$\Sigma \pm (a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n}) \; ,$$

которая въ свою очередь есть *первообразною* въ отношеніи системы предъидущей, то ур. (7) можно выразить слѣдующею теоремою:

Опредѣлитель дополнительной системы равенъ опредѣлителю первообразной системы, возвышенному въ степень, показатель которой единицею меньше указателя порядка первообразнаго опредѣлителя.

Частный случай этой теоремы для $n = 3$ былъ уже извѣстенъ Лагранжу.

Такъ какъ для дополнительной системы можно также составить дополнительную систему, опредѣлитель которой долженъ находиться въ той же зависимости отъ опредѣлителя первой дополнительной системы, какъ опредѣлитель этой первой дополнительной системы отъ опредѣлителя системы первообразной: то, въ силу равенства (7), будетъ: опредѣлитель второй дополнительной системы равенъ опредѣлителю первообразной системы, возвышенному въ степень, показатель которой равенъ квадрату разности указателя порядка опредѣлителя первообразной системы и единицы.

Продолжая подобныя разсужденія, легко убѣдиться, что имѣетъ мѣсто и слѣдующая весьма общая теорема:

Опредѣлитель m-ой дополнительной системы равенъ опредѣлителю первообразной систеты, возвышенному въ степень, показатель которой равенъ m-ой степени отъ разности указателя первообразной системы и единицы.

Изъ послѣдней теоремы вытекаетъ какъ слѣдствіе слѣдующая:

Ежели между опредѣлителями n-ого порядка имѣетъ мѣсто равенство:

$$R = P \, . \, \varphi \; ,$$

то и между опредѣлителями ихъ дополнительныхъ системъ одного и тогоже указателя существуетъ подобное же равенство, т. е.:

$$R^{(n-1)^m} = P^{(n-1)^m} = \varphi^{(n-1)^m} \; ,$$

что очевидно.

При полученіи послѣдняго произведенія существуетъ таже аналогія между элементами дополнительныхъ системъ, какова между элементами первообразныхъ системъ.

Минскъ, 2 Ноября 1862 г. **А. Жбиковскій.**

Ueber das Gleichgewicht der Wärme und das der Elektricität in einem Körper, welcher von zwei nicht concentrischen Kugelflächen begrenzt wird.

Von *Carl Neumann* in Halle.

In der Theorie der Wärme und in der Theorie der (statischen) Elektricität existiren zwei Probleme, welche unter einander, was ihre mathematische Behandlung anbelangt, eine sehr nahe Verwandtschaft besitzen. Das eine derselben hat die

I. Bestimmung des stationären Temperaturzustandes in einem Körper, dessen Oberfläche überall mit willkührlich gegebenen und unveränderlichen Wärmequellen in Contact steht;

das andere hat die

II. Bestimmung der elektrischen Vertheilung in einem Körper, welcher sich im Bereich willkührlich gegebener und unveränderlicher elektrischer Kräfte befindet, (bei Berücksichtigung dieser Kräfte und bei gleichzeitiger Berücksichtigung derjenigen Kräfte, mit welchen die elektrischen Theilchen im Körper aufeinander wirken)

zum Gegenstande.

In einer Abhandlung, welche soeben veröffentlicht worden ist (*) habe ich diese beiden Probleme für einen homogenen Körper, welcher von irgend zwei einander nicht schneidenden Kugelflächen begrenzt wird, in voller Allgemeinheit gelöset. Ich beabsichtige hier die Methoden, deren ich mich dabei bedient habe, kurz anzudeuten.

Ein Körper der eben genannten Art kann ja nach der Lage der beiden ihn begrenzenden Kugelflächen sehr verschiedene Gestalten besitzen. Es können nämlich die beiden Flächen den Körper entweder *beide äusserlich*, oder es können ihn *beide innerlich*, oder es kann endlich die *eine* ihn *äusserlich*, die *andere* ihn *innehrlich* begrenzen. Im ersten Fall haben wir es dann mit einem Körper zu thun, der aus zwei getrennten Stücken, nämlich aus zwei Kugeln besteht; im zweiten Fall mit einem Körper zu thun, der in seinem Innern zwei kugelförmige Höhlungen besitzt und nach Aussen hin ringsum unbegrenzt ist; im dritten Fall endlich mit einem Körper, der eine schalenförmige Gestalt besitzt.

Durch meine Untersuchung wird das I. Problem für diese drei Fälle vollständig gelöst werden.

Was ferner das II. Problem anbelangt, so ist dasselbe für den *ersten* der in Rede stehenden drei Fälle bekantlich schon von *Poisson* behandelt, von *Poisson* aber nur unter der besonderen Voraussetzung gelöst worden, dass die gegebenen elektrischen Kräfte *Null* sind. Meine Untersuchung geht weiter. Obgleich sich dieselbe nämlich eigentlich nur auf das Problem I. bezieht, so bieten die darin enthaltenen Entwickelungen doch die Mittel dar, um auch das II. Problem für *jeden* der genannten drei Fälle und für *beliebig* gegebene elektrische Kräfte zu lösen.

Im Wesentlichen handelt es sich bei Lösung der Probleme I. und II. fur irgend einen der in Rede stehenden drei Fälle um *ein und dieselbe Aufgabe*, nämlich um die Ermittelung einer von den rechtwinkligen Coordinaten x, y, z abhängenden Function V, welche innerhalb eines von zwei Kugelflächen begrenzten Raumes allenthalben der Differential-Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

Genüge leistet, welche ausserdem innerhalb dieses Raumes gewisse Stetigkeits-Bedingungen erfüllt, welche ferner, falls der genannte Raum sich ins Unendliche hin erstreckt, für die unendlich fernen Puncte auf gewisse Weise (*) gegen Null convergirt, und welche endlich auf jenen Kugelflächen selber beliebig gegebene Werthe besitzt.

Ich wende, um diese Aufgabe zu lösen, als Coordinaten die Parameter dreier orthogonaler Flächensysteme an, über deren Beschaffenheit Folgendes bemerkt werden mag.

Construirt man alle Puncte, deren Abstände nach zwei festen Puncten hin ein gegebenes Verhältniss besitzen, so werden diese Puncte in ihrer Gesammtheit eine Kugelfläche bilden. Aendert man den Werth jenes Verhältnisses, so wird man successive andere und andere Kugelflächen erhalten; und zwar werden die Mittelpuncte aller dieser Flächen mit jenen beiden festen Puncten in ein und derselben geraden Linie liegen. Dieses ist das *erste* der von mir angewendeten drei Flächensysteme. Den beiden festen Puncten — ich nenne sie die beiden *Pole* — gebe ich dabei in jedem speciellen Falle eine solche Lage, dass die beiden Begrenzungsflächen des gegebenen Körpers mit zu den Kugelflächen dieses Systemes gehören.

Construirt man ferner alle Puncte, von welchen aus gesehen die Pole gleich weit von einander entfernt erscheinen, so erhält man Puncte, die in ihrer Gesammtheit eine gewisse Rotationsfläche bilden (**). Aendert man

(*) Im Verlage vom H. W. Schmidt in Halle a. d. S.; betitelt „Lösung des allgemeinen Problemes des stationären Temperaturzustandes für einen homogenen Körper, welcher von irgend *zwei nichtconcentrischen Kugelflächen* begrenzt wird.“

(*) Für einen unendlich fernen Punct muss der Werth von V gegen $\frac{\varkappa}{r}$ convergiren, wo r den Abstand jenes Punctes von irgend einem festen Punct in der Endlichkeit und $\varkappa$ irgend welche Constante vorstellt.

(**) Es wird diese Fläche eine Kugel sein, sobald der Winkel, unter welchem man nach den beiden Polen sieht, gerade ein rechter ist. Ist hingegen dieser Winkel ein spitzer oder ein stumpfer, so wird jene Fläche eine Rotationsfläche sein, welche in jedem der beiden Pole eine *Spitze* besitzt.

die Grösse jener scheinbaren Entfernung, so erhält man successive andere und andere Rotationsflächen. Diese Flächen, deren gemeinsame Rotations-Achse durch die Verbindungslinie der beiden Pole dargestellt wird, sind zu den vorher genannten Kugelflächen orthogonal, und bilden in ihrer Gesammtheit das *zweite* der von mir angewendeten Flächensysteme.

Das *dritte* Flächensystem endlich wird durch die Meridian-Ebenen der beiden ersten Flächensysteme, d. i. durch Ebenen repräsentirt, welche sämmtlich durch die beiden Pole hindurchgehen.

Sind die beiden den Körper begrenzenden Kugelflächen gegeben, so lassen sich die beiden Pole sofort construiren (*); sind diese aber construirt, so ist damit die Lage der drei Flächensysteme überhaupt vollständig bestimmt.

Die Parameter dieser drei Flächensysteme sind es also, deren ich mich bei meiner Untersuchung als Coordinaten bediene. Man könnte dieselben, falls ein Name erwünscht erscheinen sollte, die „*dipolaren Coordinaten*“ nennen.

Einen besonders einfachen Charakter gewinnt die Beschaffenheit unserer drei Flächensysteme, sobald die beiden Begrenzungsflächen des gegebenen Körpers *concentrisch* sind. Alsdann nämlich fällt der eine Pol in den gemeinsamen Mittelpunct dieser beiden Flächen, der andere Pol in die Unendlichkeit und dem entsprechend verwandelt sich dann von jenen drei Flächensystemen das erste in ein System concentrischer Kugeln, das zweite in ein System von Rotationskegeln und das dritte in die Meridianebenen dieser Kegel. Man übersieht daher sofort, dass die Parameter der drei Flächensysteme sich in diesem Specialfall in die gewöhnlichen Polar-Coordinaten verwandeln werden. Wollte man also, wie es wohl zweckmässig sein dürfte, die dipolaren Coordinaten für diesen Specialfall mit dem Namen „*monopolare Coordinaten*“ bezeichnen, so würden die monopolaren Coordinaten identisch sein mit den *gewöhnlichen Polar-Coordinaten.*

Ausserdem ist noch ein anderer Specialfall zu erwähnen, der dann eintritt, wenn die beiden Begrenzungsflächen des gegebenen Körpers einander gerade *berühren.* Findet dieses statt, so fallen die beiden Pole in *einen* Punct zusammen und zwar in den Contactpunct jener beiden Flächen. Man könnte in diesem Specialfall die dipolaren Coordinaten mit dem Namen *synpolare* „*Coordinaten*“ bezeichnen.

Zur Lösung der Aufgabe, um welche es sich handelt, nämlich zur Bestimmung der vorhin genannten Function V ist es nun vor allen Dingen erforderlich, dass man den Ausdruck, in welchen sich der *reciproke Werth der Entfernung zweier Puncte* bei Einführung der neuen Coordinaten verwandelt, in eine Reihe zu entwickeln im Stande ist, bei welcher jedes einzelne Glied Y der Differential-Gleichung

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2}=0$$

Genüge leistet.

Für die *monopolaren* Coordinaten ist diese Entwickelung bekanntlich bereits von *Laplace* ausgeführt worden, und zwar mit Benutzung einer Function $P^{(n)}(\eta)$, welche der Differential-Gleichung

$$\frac{\partial\,.\,(1-\eta^2)\dfrac{\partial P^{(n)}(\eta)}{\partial\eta}}{\partial\eta}+n\,(n+1)\,P^{(n)}(\eta)=0$$

Genüge leistet.

Was nun die *dipolaren* Coordinaten anbelangt, so führt meine Untersuchung zu dem merkwürdigen Resultat, dass bei Anwendung dieser die Entwickelung jener reciproken Entfernung mit der eben erwähnten Laplace'schen Entwickelung der *Form* nach identisch wird; nämlich zu dem Resultat, dass es im Wesentlichen nur der Vertauschung der monopolaren mit den dipolaren Coordinaten bedarf, um die eine Entwickelung in die andere umzuwandeln.

Wesentlich anders gestaltet sich die Sache hingegen bei Anwendung der *synpolaren* Coordinaten. Geht man nämlich von dem allgemeinen Fall der dipolaren Coordinaten zu dem Specialfall der synpolaren Coordinaten über, so tritt bei Ausführung jener Entwickelung an Stelle der *Laplace*'schen Function $P^{(n)}(\eta)$ eine gewisse andere bereits von *Fourier* und später von *Bessel* benutzte Function, welche ich mit $J(n\eta)$ bezeichne, und welche der Differential-Gleichung

$$\frac{\partial^2 J(n\eta)}{\partial\eta^2}+\frac{1}{\eta}\,\frac{\partial J(n\eta)}{\partial\eta}+n^2 J(n\eta)=0$$

Genüge leistet. Und gleichzeitig mit dieser Umänderung verwandelt sich ausserdem die *Reihe*, durch welche jene Entwickelung dargestellt wird, in ein *bestimmtes Integral.*

Ist der reciproke Werth der entfernung zweier Puncte in der hier angedeuteten Art dargestellt, so lässt sich dann die Function V leicht ermitteln.

In Betreff der synpolaren Coordinaten mag noch bemerkt werden, dass die darüber von mir angestellte Untersuchung beiläufig zu einem Resultat führt, welches für die Theorie der Functionen im Allgemeinen nicht ohne Interesse ist. Im Verlaufe der Untersuchung ergiebt sich nämlich, dass jede willkührlich gegebene, von *zwei* Argumenten abhängende Function durch ein gewisses *drei*faches Integral dargestellt werden kann; dass also für die eben genannten Functionen eine Darstellung existirt, welche dem Fourier'schen *zwei*fachen Integrale für eine Function *eines* Argumentes vollständig analog ist.

Dass von den beiden zu Anfang genannten Problemen, I und II, das Wärmeproblem durch die Bestimmung der Function V unmittelbar seine Lösung findet, wird

(*) Man braucht zu diesem Zweck nur in irgend einer Meridianebene einen Kreis zu construiren, welcher die beiden Kugelflächen senkrecht durchschneidet. Die beiden Puncte, in welchen dieser Kreis und die Verbindungslinie der beiden Kugelmittelpuncte einander schneiden, sind dann die beiden Pole.

man sofort erkennen; dass aber auch das andere, nämlich das Elektricitätsproblem auf die Bestimmung einer solchen Function V reducirt werden kann, badarf wohl noch einer näheren Erörterung.

Der Einfachheit willen beschränke ich mich dabei auf den Fall, dass der Körper aus zwei getrennten (oder auch einander berührenden) Kugeln besteht. Jede dieser beiden Kugeln ist mit einem gegebenen Quantum Elektricität geladen. Es handelt sich darum, die Vertheilung zu ermitteln, welche diese Elektricitätsmengen auf den Oberflächen der beiden Kugeln unter ihrem gegenseitigen Einfluss sowie unter dem Einfluss gegebener unveränderlicher Kräfte annehmen. Ich beginne damit, dass ich zuerst das Potential derjenigen Einwirkung berechne, welche nach Eintritt der eben erwähnten Gleichgewichtslage die auf *beiden* Kugelflächen vorhandenen elektrischen Belegungen zusammengenommen auf beliebige Puncte des Raumes ausüben. Der Werth dieses Potentiales wird für *jeden* der drei Räume, in welchen der ganze unendliche Raum durch jene zwei Kugelflächen zerlegt wird, durch eine *andere* Function dargestellt werden. Der Werth des Potentiales für den Raum ausserhalb beider Kugeln mag mit V, der Werth desselben für den Raum innerhalb der einen Kugel mit F, und der Werth desselben für den Raum innerhalb der andern mit Φ bezeichnet werden. Für das Potential V ergeben sich nun zunächst folgende Bedingungen. Bezeichnet P das Potential der gegebenen und unveränderlichen Kräfte, welche auf die Kugeln einwirken, so muss V eine stetige Function sein, welche in dem Raume ausserhalb der beiden Kugeln allenthalben der Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

Genüge leistet, welche ferner für die unendlich fernen Puncte dieses Raumes auf gewisse (*) Weise gegen Null convergirt, und welche endlich an der Oberfläche der einen Kugel der Relation $V+P=C$, an der Oberfläche der andern Kugel der Relation $V+P=\Gamma$ Genüge leistet, wo C und Γ vor der Hand noch willkührliche Constanten vorstellen. Diese Bedingungen sind zur Bestimmung von V vollständig ausreichend. Und zwar kann man vermittelst der in meiner Abhandlung gegebenen Formeln den Werth von V sofort hinstellen. Was ferner F anbelangt, so ist F eine stetige Function, welche innerhalb der ersten Kugel allenthalben der Gleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}=0$$

(*) Für einen unendlich fernen Punct muss der Werth von V gegen $\frac{\varkappa}{r}$ convergiren, wenn r den Abstand jenes Punctes von irgend einem festen Puncte in der Endlichkeit und $\varkappa$ eine beliebige Constante vorstellt.

genügen, und ausserdem an der Oberfläche dieser Kugel die Relation $F+P=C$ erfüllen muss. Analoge Bedingungen ergeben sich mit Bezug auf die zweite Kugel für Φ. Man sieht daher sofort, dass die Bestimmung dieser Functionen F und Φ keine Schwierigkeiten darbietet, dass nämlich die Werthe derselben vermittelst der bekannten *Laplace*'schen Entwickelungen sofort berechnet werden können. Jedoch sind auch hiebei die *neuen* Entwickelungen, welche ich in meiner Abhandlung gebe, nicht ohne Nutzen. Wollte man nämlich der *Laplace*'schen Methode folgen, so würde man bei Berechnung von F und Φ *verschiedene* Coordinatensysteme zu Grunde legen müssen, indem man einmal den Mittelpunct der einen, das andere Mal den der andern Kugel zum Anfangspunct nehmen müsste. Wendet man dagegen die Methoden an, welche in der vorliegenden Abhandlung dargelegt werden, so kann man sich bei Bestimmung von F und Φ *ein und desselben* Coordinatensystemes, und zwar *ebendesselben* Coordinatensystemes bedienen, welches bereits bei Berechnung des zuvor besprochenen Potentiales V angewendet werden muss; so dass man also alle drei Potentiale V, F und Φ unmittelbar als Functionen *ein und derselben* Coordinaten (**) darstellen kann.

Sind V, F, Φ berechnet, so kann man dann bekanntlich die Dichtigkeiten der gesuchten elektrischen Belegungen der beiden Kugelflächen leicht durch gewisse Differential-Quotienten dieser Potentiale darstellen. Bezeichnet man nämlich jene Dichtigkeiten bei den beiden Kugeln respective mit E und H, so ist:

$$4\pi E=\frac{\partial F}{\partial r}-\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$4\pi H=\frac{\partial \Phi}{\partial \varrho}-\frac{\partial V}{\partial \varrho},$$

wo r den Radius der einen, ϱ den der andern Kugel vorstellt. Endlich werden dann die in diesen Ausdrücken für E und H noch enthaltenen willkührlichen Constanten C und Γ leicht der Art bestimmt werden können, dass die auf jeder Kugel enthaltene Elektricitätsmenge den für dieselbe gegebenen Werth besitzt.

Meine Methode zur Lösung des in Rede stehenden Elektricitätsproblemes ist also, wie man sieht, nicht nur allgemeiner als die von *Poisson* gegebene, sondern auch viel directer und einfacher als jene (***).

(**) Es sind dies, falls die beiden Kugeln einander nicht berühren, die *dipolaren*, und falls sie einander berühren, die *synpolaren* Coordinaten.

(***) Эта статья составляетъ собственно введеніе къ новому сочиненію автора, упом. въ 1-мъ примѣчаніи; но, сообщая ее въ редакцію съ просьбою о напечатаніи, авторъ сдѣлалъ нѣкоторыя измѣненія въ изложеніи, сообразно новой, приданной ей формѣ, и въ письмѣ своемъ выразилъ ту мысль, что публикованіе этой ноты въ русскомъ ученомъ журналѣ можетъ послужить въ пользу распространенія его новаго труда. *Ред.*

О приложеніяхъ формулы

$$\frac{2m\pi}{\varDelta u}\, f(x) = \int_0^{\frac{2m\pi}{\varDelta u}} f(x+\varrho\, e^{iy})\, \frac{\sin y\,\left(n - \frac{\varDelta u}{2}\right)}{\sin \frac{y\varDelta u}{2}}\, dy\ .$$

(Прибавленіе къ статьѣ »О произвольныхъ функціяхъ« См. № 32 и 33).

Преобразуемъ, съ этою цѣлію, разсматриваемую формулу. Для сего положимъ въ ней:

$$\frac{2m\pi}{\varDelta u} = q\ ,\quad \frac{\varDelta u}{2} = k\ ;$$

тогда получимъ:

$$q\, f(x) = \int_0^q f(x+\varrho\, e^{yi})\, \frac{\sin y\,(n-k)}{\sin yk}\, dy\ ,$$

или:

$$q\, f(x) = \int_0^q f(x+\varrho\, e^{yi}) \left[\frac{\sin yn \cos yk - \sin yk \cos yn}{\sin yk}\right] dy, (a)$$

или:

$$q\ f(x) = \int_0^q f(x+\varrho e^{yi}) \sin yn . \operatorname{cotg} yk\, dy - \int_0^q f(x+\varrho e^{yi}) \cos yn\, dy.$$

Но такъ какъ, на основаніи формулы

$$q\, f(x) = \int_0^q \sum_0^n f(x+\varrho\, e^{yi}) \cos uy\, dy\ ,$$

или:

$$q\, f(x) = \int_0^q f(x+\varrho\, e^{yi})\, dy + \int_0^q \sum_{\varDelta u}^n f(x+\varrho\, e^{yi}) \cos uy\, dy\ ,$$

интегралъ:

$$\int_0^q \sum_{\varDelta u}^n f(x+\varrho\, e^{yi}) \cos uy\, dy = 0\ ;$$

то, поэтому и интегралъ

$$\int_0^q f(x+\varrho\, e^{yi}) \cos ny\, dy = 0\ (*).$$

Слѣдовательно, вмѣсто формулы (a), можемъ написать:

$$q\, f(x) = \int_0^q f(x+\varrho\, e^{yi}) \sin yn . \operatorname{cotg} yk\, dy\ .\ .\ .\ .\ .\ (b)$$

Сдѣлавъ въ послѣдней формулѣ $f(z) = A =$ постоянному числу; получимъ:

$$q = \int_0^q \sin yn . \operatorname{cotg} yk\, dy\ .$$

Сдѣлавъ въ (b) $x = 0$, $f(z) = e^{z^{(x)}}$, найдемъ:

$$q = \int_0^q e^{\varrho e^{yi}} \sin yn . \operatorname{cotg} yk\, dy\ ,$$

или:

$$q = \int_0^q e^{\varrho \cos y} [\cos(\varrho \sin y) + i \sin(\varrho \sin y)] \sin yn . \operatorname{cotg} yk\, dy$$

или:

$$q = \int_0^q e^{\varrho \cos y} \cos(\varrho \sin y) \sin yn . \operatorname{cotg} yk\, dy$$

$$0 = \int_0^q e^{\varrho \cos y} \sin(\varrho \sin y) \sin yn . \operatorname{cotg} yk\, dy\ .$$

Вмѣсто того, чтобы дѣлать частныя приложенія формулы (b), найдемъ лучше слѣдующую зависимость произвольной функціи отъ суммъ конечныхъ и суммъ дифференціальныхъ:

(*) Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ $n \equiv 0$ (mod. $\varDelta u$), то $n = l\varDelta u$, а потому:

$$\int_0^q f(x+\varrho\, e^{yi}) \cos ny\, dy = \int_0^q f(x+\varrho\, e^{yi}) \cos l\varDelta uy\, dy\ ;$$

послѣдній-же интегралъ, очевидно, равенъ нулю, ибо l есть одно изъ значеній n, и притомъ $< n$.

$$Y = \int_0^q \sum_0^n f(x + \varrho\, e^{yi}) \sin uy\, dy \ .$$

Для сего имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} Y &= f(x)\int_0^q [\sin \varDelta uy + \ldots + \sin l\varDelta uy + \ldots]\, dy + \ldots \\ &+ \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\varrho^k \int_0^q e^{kyi}[\sin \varDelta uy + \ldots + \sin l\varDelta uy + \ldots]\, dy + \ldots \end{aligned}\right\} (c)$$

Откуда, если:

$$\int_0^q e^{kyi} \sin l\varDelta uy\, dy = 0 \ , \quad \int_0^q e^{kyi}\, dy = 0 \ ,$$

или:

$$\int_0^q e^{kyi} \sin l\varDelta uy\, dy = \left\{ e^{kyi}\left[\frac{ki\sin l\varDelta uy - l\varDelta u \cos l\varDelta uy}{(l\varDelta u)^2 - k^2}\right]\right\}_0^q (d)$$

$$\int_0^q e^{kyi}\, dy = \left[\frac{e^{kyi}}{ki}\right]_0^q = 0 \ ; \ \ldots\ldots\ldots (e)$$

такимъ образомъ искомая зависимость будетъ найдена. Равенства-же (d) и (e) выполнятся, какъ не трудно видѣть, при условіяхъ:

$$\varDelta u < \frac{1}{n} \ , \quad q = \frac{2m\pi}{\varDelta u} \ ,$$

гдѣ $\frac{m}{\varDelta u}$ должно быть цѣлымъ числомъ.

Принявъ въ соображеніе сказанное, изъ равенства (c) найдемъ:

$$0 = \int_0^q \sum_0^n f(x + \varrho\, e^{yi}) \sin uy\, dy \ .$$

11 Сентября 1862 года. *Н. Коціевскій.*

Замѣчаніе относительно вычисленія рефракціи при дифференціальныхъ наблюденіяхъ.

(по Гансену).

При этихъ вычисленіяхъ поступаютъ двояко: или опредѣляютъ табличную рефракцію для двухъ наблюдаемыхъ положеній и затѣмъ берутъ разность; или же прямо вычисляютъ послѣднюю для средняго положенія. Спрашивается которой методѣ должно быть дано предпочтеніе?

Обозначимъ количество рефракціи y, соотвѣтствующее данному положенію какого либо свѣтила при часовомъ углѣ онаго $= x$ и положимъ:

$$y = f(x) \ .$$

Подставивъ сюда сначала: $x - \frac{1}{2}h$ и $y + k$ вмѣсто x и y, а потомъ $x + \frac{1}{2}h$ и $y + l$ мы имѣемъ:

$$y + k = f(x - \tfrac{1}{2}h)$$

$$y + l = f(x + \tfrac{1}{2}h) \ .$$

Разлагая по Тайлоровой теоремѣ и ограничиваясь третьими дифференціалами будетъ:

$$y + k = f(x) - \frac{df(x)}{dx}\frac{h}{2} + \frac{1}{2}\frac{d^2f(x)}{dx^2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{1}{2\,.\,3}\frac{d^3f(x)}{dx^3}\left(\frac{h}{2}\right)^3$$

$$y + l = f(x) + \frac{df(x)}{dx}\frac{h}{2} + \frac{1}{2}\frac{d^2f(x)}{dx^2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{1}{2\,.\,3}\frac{d^3f(x)}{dx^3}\left(\frac{h}{2}\right)^3;$$

откуда:

$$l - k = \frac{df(x)}{dx}h + \frac{1}{24}\frac{d^3f(x)}{dx^3}h^3 \ .\ .\ .\ .\ .\ . \ (1)$$

Но кромѣ того

$$l - k = f(x + \tfrac{1}{2}h) - f(x - \tfrac{1}{2}h) \ .$$

Если подставимъ сюда: $x = x_1 + \frac{1}{2}h$, то будетъ

$$l - k = f(x_1 + h) - f(x_1) \ ,$$

откуда заключаемъ, что въ нашемъ спеціальномъ случаѣ, $l - k$ есть разность количества рефракціи, соотвѣтствующей двумъ часовымъ угламъ, для коихъ ариѳметическою срединою есть x; ибо по предъидущему

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + h) + \frac{1}{2}x_1 \ .$$

Такимъ образомъ, вычисляя упомянутую разность рефракціи для часового угла x, мы, на основаніи уравненія (1), дѣлаемъ ошибку равную $\frac{1}{24}\frac{d^4f(x)}{dx^4}h^3$. Такова неточность одной употребительной методы вычисленія.

Для показанія ошибки, вводимой въ вычисленія по другой методѣ, обозначимъ спеціальныя значенія количества рефракціи для двухъ часовыхъ угловъ:

$$y_x = f(x) \qquad \text{и} \qquad y_{x+h} = f(x+h)\ .$$

Разложивъ въ строку, имѣемъ:

$$y_{x+h} = y_x + \frac{dy_x}{dx}h + \frac{1}{2}\frac{d^2y_x}{dx^2}h^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3y_x}{dx^3}h^3\ ,$$

а также

$$y_x = y_{x+h} - \frac{dy_{x+h}}{dx}h + \frac{1}{2}\frac{d^2y_{x+h}}{dx^2}h^2 - \frac{1}{6}\frac{d^3y_{x+h}}{dx^3}h^3\ ;$$

вычитая послѣднее уравненіе изъ предъидущаго и раздѣляя разность на 2, получимъ

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dy_{x+h}}{dx} + \frac{dy}{dx}\right)h = y_{x+h} - y_x + \frac{1}{4}\left(\frac{d^2y_{x+h}}{dx^2} - \frac{d^2y_x}{dx^2}\right)h^2 - \frac{1}{12}\left(\frac{d^3y_{x+h}}{dx^3} + \frac{d^3y_x}{dx^3}\right)h^3.$$

Но $\frac{d^2y_{x+h}}{dx^2} = \frac{d^2y_x}{dx^2} + \frac{d^3y_x}{dx^3}h$ и $\frac{d^3y_{x+h}}{dx^3} = \frac{d^3y_x}{dx^3}$;

подставляя эти значенія въ предъидущее уравненіе, получимъ:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dy_{x+h}}{dx} + \frac{dy_x}{dx}\right)h = y_{x+h} - y_x + \frac{1}{12}\frac{d^3y_x}{dx^3}h^3\ ;$$

слѣдовательно здѣсь мы пренебрегаемъ $\frac{1}{12}$ долею того же самаго $\frac{d^3y_x}{dx^3}h^3$, а притомъ самое вычисленіе представляетъ двойной трудъ.

Это разсужденіе можетъ быть примѣнено ко всѣмъ непрерывнымъ функціямъ, которыя позволяютъ приложеніе Тайлоровой теоремы.

Г.

II.

Библіографическій указатель.

28. Recherches sur les propriétés magnétiques du fer, par *T. R. Thalén.* Extrait des Actes de la Société Royale des Sciences d'Upsal. 1861.

Этотъ интересный мемуаръ имѣетъ въ виду сколько техническую цѣль изслѣдованія магнитныхъ свойствъ различныхъ родовъ шведскаго желѣза; столько же и научную. Такъ напр. одинъ изъ 8-ми отдѣловъ сочиненія посвященъ изслѣдованію вліянія формы желѣзной полосы на величину магнитнаго момента, откуда выводится подтвержденіе формулы *Неймана* для случая цилиндрической формы. Методы изслѣдованія, употребленныя авторомъ, могутъ быть названы образцовыми.

29. Die Wechselwirkung der physischen Kräfte. von *W. R. Grove.* Nach der 3-ten Auflage aus dem Englischen übersetzt v. Dr. *Russdorf.* Berlin. 1863.

Это сочиненіе, заслужившее себѣ большую извѣстность, вышло третьимъ исправленнымъ изданіемъ уже въ 1855 г. а въ слѣдующемъ году было переведено на французскій языкъ *Муаньо* съ примѣчаніями *Сегэна.* Появившійся нынѣ нѣмецкій переводъ, вызванъ конечно потребностію; но онъ ничемъ не отличается отъ подлинника, хотя многія мѣста очевидно нуждаются уже въ переработкѣ.

30. Meteorologie von *C. S. Cornelius*, mit 35 Holzschnitten und 5 Karten. Halle. 1863.

Это сочиненіе, составившееся изъ лекцій, читанныхъ авторомъ въ продолженіи многихъ лѣтъ въ Университетѣ, въ Галле, представляетъ довольно полный, систематически изложенный курсъ метеорологіи, которую авторъ опредѣляетъ въ тѣсномъ смыслѣ, какъ »физику атмосферы.« Согласно этому взгляду, онъ исключаетъ изъ метеорологіи ученіе о земномъ магнетизмѣ, не смотря на то, что связь магнитныхъ явленій съ атмосферными, благодаря новѣйшимъ изслѣдованіямъ, не можетъ быть оспариваема. Правда, что эта связь во многихъ отношеніяхъ еще совершенно не разъяснена; но именно потому то и кажется намъ несправедливымъ отдѣлять отъ метеорологіи то, что при дальнѣйшемъ изученіи, такъ или иначе, но непремѣнно принесетъ съ собою бóльшую опредѣленность въ изъясненіи метеорологическихъ процессовъ.

31. Lehrbuch der sphärischen Astronomie von Dr. *F. Brünnow.* Berlin 1862. 2-te vermehrte Ausgabe.

Это, второе изданіе весьма распространеннаго между астрономами сочиненія, отличается многими измѣненіями въ порядкѣ изложенія предмета и нѣкоторыми существенными добавленіями противъ перваго изданія 1851 г.

Въ введеніи изложена въ сжатой и весьма практической формѣ метода наименьшихъ квадратовъ; также теорія нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ, встрѣчающихся въ изложеніи.

Первый отдѣлъ содержитъ болѣе подробное изъясненіе нѣкоторыхъ явленій суточнаго движенія.

Второй отдѣлъ составляютъ прецессія и нутація.

Въ третьемъ отдѣлѣ совершенно переработана статья о рефракціи.

Къ четвертому отдѣлу отнесено: приведеніе *среднихъ* положеній въ *истинныя* и наоборотъ; опредѣленіе прям. восхожденій, склоненій и наклонности эклиптики; а за тѣмъ весьма логически присоединено опредѣленіе постоянныхъ: рефракціи, аберраціи, нутаціи, прецессіи и собственнаго движенія звѣздъ.

Пятый отдѣлъ весьма не многимъ отличается отъ прежняго четвертаго.

Шестой отдѣлъ содержитъ теперь только опредѣленіе величины и вида земли и опредѣленіе горизонтальныхъ параллаксовъ.

Седьмой и послѣдній отдѣлъ, объ инструментахъ, отличается весьма существенными измѣненіями и дополненіями, въ особенности въ изслѣдованіяхъ вліянія различнаго рода источниковъ ошибокъ.

32. Die Projection in der Ebene von Dr. *H. Weissenborn*. Berlin 1862.

Предметъ этого сочиненія есть такъ называемая *новая* геометрія; но авторъ, считая это названіе по справедливости неудовлетворительнымъ, предлагаетъ свое, которое однако по нашему мнѣнію столь же мало соотвѣтствуетъ содержанію предмета и сверхъ того оно можетъ многихъ ввести въ заблужденіе. Въ оправданіе этого выбора служитъ то, что авторъ, принявъ въ основаніе методу перспективы или проэкціи, употребленную прежде всѣхъ *Паскалемъ* и *Дезаргемъ*, старался ни въ чемъ не переступать предѣловъ планиметріи. Такъ напр. и при изложеніи свойствъ коническихъ сѣченій онъ обходится безъ помощи конуса. Стремленіе автора строго ограничить избранный имъ для сочиненія предметъ, и, сообразно своему взгляду, представить его какъ систематически расположенное и сочлененное цѣлое, придаетъ его труду самостоятельный характеръ. Въ предисловіи перепечатанъ изъ сдѣлавшагося рѣдкимъ изданія: Oeuvres de Blaise Pascal. A la Haye, 1779, замѣчательный трактатъ подъ названіемъ: Essais pour les coniques и 2 письма, Паскаля и Лейбница, относящіяся къ геометрическимъ сочиненіямъ перваго, которыя какъ извѣстно, почти всѣ утрачены.

33. Die Lehre der geometrischen Beleuchtungs-Constructionen und deren Anwendung auf das technische Zeichnen. Fur technische Lehranstallten und zum Selbstunterrichte, verfasst v. *Franz Tilscher*. Wien 1862.

Цѣль сочиненія ясно опредѣляется заглавіемъ. Метода автора допускаетъ легкое практическое примѣненіе основныхъ положеній начертательной геометріи ко всякому данному случаю, при какомъ бы то нибыло наклоненіи освѣщающихъ лучей.

Г.

III.

О теоріяхъ образованія града.

Паденіе града въ лѣтнее, жаркое время принадлежитъ къ наиболѣе любопытнымъ явленіямъ въ природѣ; для объясненія этого явленія было предложено въ разное время много гипотезъ. Къ числу замѣчательнѣйшихъ теорій можно отнести въ особенности: 1) теорію *Вольты*, которая приписываетъ солнечнымъ лучамъ такую согрѣвательную силу, что образовавшіяся водяныя капли въ атмосферѣ быстро испаряются, поглощаютъ много теплоты и отъ того замерзаютъ; увеличеніе градинъ приписывается электрическому притяженію ихъ къ облакамъ, въ слѣдствіе чего градина должна находиться въ колебательномъ состояніи между 2 слоями облаковъ; 2) теорію *Леопольда фонъ Буха*, по которой образовавшаяся капля воды, падая и приходя въ соприкосновеніе съ нижними, теплѣйшими слоями атмосферы, испаряется опять, производитъ холодъ, и окружающія капли отъ этого замерзаютъ. Другія теоріи, каковы Шиблера, Иделера, Пельтье составляютъ лишь нѣкоторыя измѣненія вышеприведенныхъ.

Теоріи *Фогеля* и *Нёлльнера*, въ которыхъ предполагается, что жидкія капли могутъ находиться на значительной высотѣ, обладать очень низкою температурою, а отъ движенія, или соприкосновенія съ нами твердыхъ тѣлъ переходить въ твердое состояніе и падать на землю въ видѣ града, могутъ быть примѣнимы только къ объясненію образованія отдѣльныхъ градинъ (Müller'a Космич. Физика).

Полная теорія должна объяснить слѣдующіе пункты: 1) происхожденіе града, 2) величину и конструкцію отдѣльныхъ градинъ, 3) движеніе градовой тучи.

До сихъ поръ мы не имѣли полной теоріи; но въ послѣднее время появились двѣ очень замѣчательныя, *Дюфура* и *Мора*, объясняющія весьма удовлетворительно отдѣльныя части явленія. Постараемся изложить ихъ съ возможною точностью.

Дюфуръ, изъ опытовъ надъ замерзаніемъ воды въ сфероидальномъ состояніи, выводитъ теорію, которая очень хорошо объясняетъ образованіе отдѣльныхъ градинъ. (Pog. Ann. B. CXIV). Онъ вводилъ воду въ смѣсь изъ хлороформа и миндальнаго масла, доведенную до плотности 1, отъ чего вода, не смѣшиваясь ни съ хлороформомъ ни съ масломъ, принимала сфероидальное состояніе и держалась въ равновѣсіи внутри смѣси. Стаканъ съ приготовленными жидкостями былъ окружаемъ охладительною смѣсью, а степень сообщеннаго холода измѣрялась термометромъ. Такимъ образомъ можно было охладить воду до -10^0, -15^0

и даже 20° С, а жидкое состояніе не измѣнялось. Помощію стеклянной палочки, осторожно, можно было сводить нѣсколько водяныхъ шариковъ до соприкосновенія, отъ чего полученный сфероидъ становился больше. Опыты показали, что маленькіе водяные шарики гораздо долѣе оставались въ жидкомъ состояніи, и можно было имъ сообщить температуру гораздо низшую: они могли быть охлаждены до — 20° С. Отъ прикосновенія охлажденнаго жидкаго сфероида съ твердыми тѣлами происходило превращеніе его въ твердый видъ; но приэтомъ оказывалось, что составъ и свойства твердыхъ тѣлъ имѣютъ вліяніе на большую или меньшую скорость превращенія воды въ твердое состояніе. Такимъ образомъ, стеклянная палочка, прикасаясь съ охлажденною водою, рѣдко приводила ее въ замерзаніе, чаще металлы, какъ-то мѣдь, желѣзо и др. Отъ прикосновенія охлажденнаго сфероида съ кристаллическими тѣлами, каковы песокъ, различныя соли, очень часто происходило отвердѣніе, причемъ попавшіе кристаллики оставались внутри ледяной массы. Гальваническій токъ не измѣнялъ жидкаго состоянія, чаще электрическая искра; но искра прибора Румкорфа почти всегда приводила каплю въ твердый видъ. Напротивъ, кусокъ льда и сотрясеніе всегда причиняли отвердѣніе охлажденной воды; поэтому Дюфуръ полагаетъ, что вліяніе электрической искры на отвердѣніе зависитъ просто отъ механическаго сотрясенія.

Помощію стеклянной палочки Дюфуръ приводилъ отвердѣвшіе шарики въ соприкосновеніе, тогда они срастались; если же прикасался твердый шарикъ къ жидкому, то послѣдній обливалъ его и замерзалъ, составляя новый слой льда. Такимъ образомъ можно было образовать большой кусокъ льда, изъ новоосѣдающихъ слоевъ, причемъ всегда оказывалось, что новообразовавшіеся слои не приставали плотно къ твердому ядру, но оставляли между собою промежутки, наполненные смѣсью изъ хлороформа и масла, то есть жидкостью составляющею среду. Новонаростающіе слои не обливали шарика концентрически, отъ чего всегда получалась форма, похожая больше на эллипсоидальную. Равнымъ образомъ, какъ и срастаніе отдѣльныхъ твердыхъ шариковъ производило разнообразныя формы, настоящіе конгломераты. Изъ этихъ опытовъ Дюфуръ выводитъ теорію образованія градинъ, неговоря впрочемъ ничего объ условіяхъ ихъ первоначальнаго происхожденія. Извѣстно что водяные пары, превращаясь въ облака, приходятъ въ шарообразное состояніе; эти шарики могутъ оставаться въ жидкомъ состояніи на значительной высотѣ, при очень низкой температурѣ, и чѣмъ они меньше, тѣмъ большее оказываютъ сопротивленіе къ отвердѣнію — какъ это было видно изъ опытовъ. Шарообразное состояніе водяныхъ капель подтверждается наблюденіями Барраля и Биксіо, которые во время своего аэростатическаго путешествія нашли на высотѣ 15000 футовъ, при температурѣ — 7,0° облака, обладающія обыкновенною влажностью, и состоящія изъ мельчайшихъ водяныхъ шариковъ; только на высотѣ 18000 фут., при температурѣ — 10° С. упомянутые наблюдатели увидѣли себя среди снѣжнаго облака, котораго снѣжинки покрыли ихъ платья и всѣ снаряды. Случается нерѣдко, что даже вода, падая на землю, обладаетъ очень низкою температурою, въ особенности зимою. Иногда зимою температура воздуха уже нѣсколько времени выше 0°, а между тѣмъ упавшая дождевая капля сейчасъ замерзаетъ и образуетъ гололедицу; значитъ она имѣла температуру ниже 0°, а отъ сотрясенія при паденіи на землю, превратилась въ твердый видъ. Полученная такимъ образомъ гололедица отличается отъ обыкновенной тѣмъ, что послѣдняя образуется тогда, когда температура земной поверхности и нижнихъ слоевъ воздуха ниже 0°. Изъ всего сказаннаго видно, что на значительной высотѣ надъ земною поверхностью вода можетъ находиться въ жидкомъ, сфероидальномъ состояніи, обладая очень низкою температурою.

Уже давно замѣчено, что по большей части ядро градины состоитъ изъ скважистаго, снѣгообразнаго тѣла, около котораго расположены прозрачные, ледяные слои; иногда эти слои перемѣжаются матовыми, то есть скважистыми слоями. Образованіе подобной градины понятно изъ опытовъ Дюфура; потому что снѣжинка, попадая въ охлажденный жидкій сфероидъ, превращаетъ его въ твердую массу. Когда образовавшаяся разъ градина, конечно сначала небольшая, приходитъ въ соприкосновеніе съ новыми охлажденными сфероидами, то она покрывается новыми ледяными слоями; когда же она прикасается къ маленькимъ твердымъ градинамъ, или къ отдѣльнымъ снѣжинкамъ, то послѣднія примерзаютъ къ ней и образуютъ скважистый слой. Такимъ образомъ получается рядъ слоевъ прозрачныхъ и ноздреватыхъ въ градинахъ значительной величины. Совершенно прозрачная же градина происходитъ тогда, когда жидкая капля твердѣетъ безъ участія снѣжинокъ, то есть отъ быстраго движенія, или сотрясенія во время прохожденія электрической искры.

Форма градинъ бываетъ разнообразна: шаровидная, эллипсоидальная, сплюснутая, угловатая, наиболѣе же конгломератовая; по опытамъ Дюфура оказывается, что первая форма основная, вторыя же производныя, которыя происходятъ отъ наростанія новыхъ ледяныхъ слоевъ, или отъ срастанія многихъ отдѣльныхъ градинъ. Точно также и микроскопическія изслѣдованія Уэллера (Waller) (Phil. Mag. 1846) надъ градинами показали, что конгломератовая форма происходитъ отъ срастанія отдѣльныхъ градинокъ.

Иногда внутри градинъ попадаются постороннія твердыя тѣла, какъ, напримѣръ, метеорная пыль; въ самомъ дѣлѣ изъ опытовъ Дюфура видно, что кристаллическія и вообще твердыя тѣла, попадая въ охлажденный сфероидъ, побольшей части приводятъ его въ твердое состояніе: если метеорная пыль попала въ охлажденную каплю въ атмосферѣ, то произвела и въ ней замерзаніе и покрылась сама ледянымъ слоемъ. Такія градины были наблюдаемы *Пиктетомъ* въ Ирландіи; *Эверсманомъ* въ Сибири и Оренбургской Губерніи (хотя Пулье оспаривалъ отчасти вѣрность такого наблюденія).

Очень часто въ градинахъ попадаются воздушные пузырьки, а *Уэллеръ* утверждаетъ, что они находятся во всякой градинѣ. По опытамъ Дюфура оказалось, что струя воздуха, проходя чрезъ охлажденную воду,

не производить отвердѣнія, то есть около пузырька воздуха не образуется ледянаго слоя; откуда же пузырькя въ градинѣ? Выше было сказано, что наростающіе новые ледяные слои искуственно образованной градины въ опытахъ Дюфура не приставали плотно другъ къ другу, но оставляли между собою промежутки, наполненные смѣсью изъ хлороформа и миндальнаго масла; поэтому, если подобное образованіе градинъ имѣетъ мѣсто и въ атмосферѣ, то между наросшими слоями долженъ заключаться воздухъ, какъ составляющій средину, въ которой образованіе происходитъ.

И такъ опыты Дюфура показали весь процессъ образованія градинъ; не достаетъ только причинъ, отъ которыхъ зависитъ первое появленіе ихъ — и мы бы имѣли теорію вполнѣ удовлетворяющую нашимъ требованіямъ.

Моръ даетъ такую теорію, объясняющую собственно происхожденіе явленія т. е. образованія градовыхъ облаковъ, (Pog. An. B CXVII. 89). Сущность ея заключается въ ниже слѣдующемъ.

Атмосфера расположена слоями неодинаковой плотности, нижніе тяжелѣе верхнихъ: это общій законъ. Количество паровъ не вездѣ одинаково; оно зависитъ отъ условій мѣстности. Температура уменьшается къ верьху довольно быстро, такъ что на высотѣ 21060 футовъ, или $1\frac{1}{2}$ высоты Монблана, Барраль и Бикеіо наблюдали уже — 39° С. лѣтомъ (*). Спокойствіе въ атмосферѣ можетъ быть только тогда, когда все расположено по плотностямъ; но тогда нижніе слои должны быть плотнѣе, тяжелѣе, теплѣе и влажнѣе верхнихъ. Спокойствіе почти никогда не существуетъ, потому что солнце, согрѣвая одно мѣсто, разрѣжаетъ атмосферу, отъ чего воздухъ приходитъ въ движеніе. Отъ смѣшенія поднимающихся нижнихъ и влажныхъ слоевъ воздуха съ верхними холодными, происходитъ ихъ насыщеніе, а при дальнѣйшемъ повтореніи смѣшенія можетъ образоваться переходъ изъ газообразнаго въ жидкое состояніе. Въ этотъ моментъ еще болѣе нарушается равновѣсіе въ атмосферѣ по слѣдующимъ причинамъ.

Извѣстно, что 1 кубическій сентиметръ воды, (вѣсомъ въ 1 граммъ), при температурѣ 100° С., и 760^{mm} давленія можетъ насыщать пространство почти въ 1700 куб. сент. Извѣстно тоже, что насыщеніе при низшей температурѣ происходитъ гораздо скорѣе, такъ что паръ, вѣсомъ въ 1 граммъ, при температурѣ 20° можетъ насытить простраство уже въ 58224 куб. сент., а при 0° еще болѣе, въ 182323 куб. сент. Съ уменьшающимся давленіемъ, объемъ, занимаемый паромъ увеличивается по закону Маріотта; а потому при давленіи въ 380^{mm} объемъ насыщаемаго пространства еще увеличивается вдвое; то есть 1 граммъ пара при 100° С, можетъ насыщать пространство въ 3400, при 20° — 116448, а при 0° — 364646. Высота же, на которой давленіе атмосферы составляетъ 380^{mm}, вычисленная по извѣстной барометрической формулѣ, составляетъ около 18626 футовъ. Такая высота не слишкомъ велика сравнительно съ цѣлою высотою атмосферы, потому что встрѣчаются даже высшіе горы. На большей высотѣ насыщеніе должно происходить еще скорѣе, потому что 1 граммъ пара можетъ насыщать еще большее пространство. Какъ бы то нибыло, только при переходѣ пара изъ газообразнаго состоянія въ жидкое объемъ образовавшейся воды гораздо меньше, и тѣмъ меньше, чѣмъ при низшей температурѣ и давленіи совершился переходъ въ жидкое состояніе: такимъ образомъ здѣсь должно происходить огромное пустое пространство — что и составляетъ самое важное условіе въ образованіи града и сопутствующихъ ему явленій. Образовавшаяся пустота сейчасъ же наполняется новыми притоками воздуха, стремящагося туда со всѣхъ сторонъ и сверху; воздухъ, приходящій съ разныхъ сторонъ, причиняетъ новое сгущеніе пара въ воду, потому что верхніе холодные слои, смѣшиваясь съ влажными, насыщаютъ ихъ. Чѣмъ скорѣе идетъ сгущеніе, тѣмъ скорѣе стремится воздухъ сверху тѣмъ меньшій имѣютъ доступъ боковые слои. Притомъ верхніе слои воздуха, пришедшіе изъ меньшаго давленія въ большее, сжимаются и даютъ мѣсто новому движенію. Отсюда видно, что простой переходъ пара изъ газообразнаго въ жидкое состояніе причиняетъ быстрое пониженіе верхнихъ слоевъ атмосферы, и движеніе воздуха со всѣхъ сторонъ,—вообще, стремленіе въ образовавшуюся воронкообразную пучину, которая, постепенно увеличиваясь, достигаетъ до земной поверхности. Такой взглядъ на происхожденіе явленія ставитъ градъ въ тѣснѣйшую зависимость съ обыкновеннымъ паденіемъ дождя; все зависитъ отъ быстроты движенія верхнихъ холодныхъ слоевъ въ нижніе.

Верхніе холодные слои, приводя паръ низшихъ слоевъ въ жидкое, а даже и твердое состояніе, согрѣваются отчасти освобождающеюся при этомъ переходѣ теплотою; но это согрѣваніе незначительно по причинѣ ихъ низкой температуры, и въ слѣдствіе того происходитъ развѣ только не такъ холодный градъ, напримѣръ не въ — 10°.

Замерзшія, очень маленькія капли воды, падая, приходятъ въ прикосновеніе съ новыми жидкими каплями, охлаждаютъ ихъ, приводя нѣкоторыя въ жидкое, другія въ твердое состояніе, соединяются съ ними и такимъ образомъ увеличиваются въ объемѣ, если низкая температура тому способствуетъ. Тѣмъ большая можетъ образоваться градина, чѣмъ выше началось замерзаніе, и, въ то же время, чѣмъ холоднѣе она: въ этомъ случаѣ она можетъ заморозить большее количество воды при переходѣ чрезъ влажные слои атмосферы. Вода легко пристаетъ къ твердому однородному тѣлу, подобно тому какъ изъ раствора соли легче отдѣляются кристаллики, если уже брошенъ туда однородный кристаллъ, отчего онъ вскорѣ увеличивается въ объемѣ.

(*) Примѣчаніе Принять это число безусловно не возможно; путешествіе упомянутыхъ наблюдателей было предпринято сейчасъ послѣ проливнаго дождя, когда густая облака покрывали мѣстный небосклонъ, когда они должны были проходить слой облака толщиною въ 5000 футовъ. Извѣстно же, что земля распространяетъ теплоту на значительную высоту въ атмосферѣ; поэтому, если облака задерживаютъ такую теплоту, то слои лежащіе надъ облакомъ, должны имѣть температуру гораздо меньше, нежели въ то время, когда небо ясно. Во всякомъ случаѣ пониженіе температуры съ возвышеніемъ надъ земною поверхностью не сомнѣнно, и Гейлюсакъ на той же высотѣ 21000 футовъ наблюдалъ до — 10°, С.

И такъ, по теоріи Мора, градъ образуется только въ такомъ случаѣ, когда въ атмосферѣ происходитъ быстрое охлажденіе влажныхъ слоевъ, быстрый переходъ изъ газообразнаго въ жидкое состояніе, и наконецъ чрезвычайно скорое движеніе верхнихъ слоевъ внизъ, такъ что́ боковые слои не могутъ попасть въ образовавшуюся воронку.

Изъ этой теоріи выходитъ, какъ необходимое слѣдствіе, что паденіе града не можетъ быть на большомъ пространствѣ.

Если градъ образуется дѣйствительно отъ смѣшенія холодныхъ слоевъ съ влажными, то, на оборотъ, онъ долженъ всякій разъ уничтожаться въ то время, когда нижніе слои обладаютъ большою сухостью и низкою температурою. Отсюда происходитъ, что паденія града зимою, равно какъ и въ странахъ холоднаго пояса, быть не можетъ, или по крайней мѣрѣ это явленіе должно быть чрезвычайно рѣдкимъ. Если холодные верхніе слои, попадая въ нижніе и влажные, успѣваютъ нагрѣваться, тогда образованіе града невозможно; и въ этомъ случаѣ его замѣнитъ обыкновенный холодный дождь.

Такой взглядъ на образованіе града можетъ легко объяснить причину, почему иногда жители горныхъ странъ видятъ какъ въ долинахъ падаетъ градъ, въ то время когда у нихъ его нѣтъ и на оборотъ.

Паденіе града бываетъ только въ умѣренныхъ странахъ; ибо нижніе слои воздуха полярныхъ странъ бѣдны водяными парами; тамъ градовая туча не имѣетъ дастаточной пищи: двигаясь на сѣверъ градовыя тучи должны ослабѣвать и наконецъ уничтожаться, или переходить въ обыкновенную *крупу*, какъ это практикуется у насъ зимою. Въ тропическихъ странахъ воздухъ сильно нагрѣтъ; въ немъ очень много паровъ: за то и верхніе слои не такъ холодны, по причинѣ безпрестанно подымающихся теплыхъ потоковъ. Отъ смѣшенія умѣренно-холодныхъ слоевъ съ теплыми и влажными, не можетъ образоваться градъ а только обильный дождь; отсюда происходятъ тѣ замѣчательные тропическіе дожди и грозы, которые повторяются періодически.

Градъ падаетъ чаще послѣ полудня чѣмъ до полудня; потому что воздухъ послѣ полудня теплѣе и обильнѣе парами. Равнымъ образомъ, градъ падаетъ чаще днемъ, нежели ночью, по тѣмъ же причинамъ; а если и падаетъ ночью, то чаще до полуночи. Понятно тоже, что спокойный и теплый воздухъ болѣе способствуетъ образованію града, чѣмъ безпрестанно движущійся. По всѣмъ извѣстнымъ свидѣтельствамъ оказывается, что самый сильный и опустошительный градъ появляется послѣ долговременныхъ удушливо-теплыхъ спокойствій въ атмосферѣ.

Паденіе града всегда сопровождается грозою, частыми элекрическими разряженіями; поэтому въ прежнихъ теоріяхъ электричество играетъ важную роль въ образованіи града; этотъ взглядъ былъ поводомъ къ устройству градоотводовъ, какъ предохранительныхъ средствъ, оказавшихся вскорѣ безполезными: а между тѣмъ слѣдуетъ понимать наоборотъ, то есть, что молнія есть слѣдствіе образованія града. Отъ быстраго движенія холодныхъ слоевъ воздуха внутри теплыхъ, происходитъ огромне треніе между воздушными и паровыми частицами, что возбуждаетъ въ нихъ электричество; и это не сомнѣнно, ибо подтверждается на опытѣ съ помощію электрической машины Армстронга, и даже во всѣхъ паровыхъ котлахъ. Нельзя принимать, что облака заряжаются однимъ опредѣленнымъ электричествомъ; то, которое мы наблюдаемъ, помощію электроскоповъ, принадлежитъ нижнимъ слоямъ атмосферы: напротивъ чаще случается видѣть разряженіе электричества между самими облаками, нежели между ними и землей, а это можетъ быть только въ томъ случаѣ, когда въ облакахъ различные слои различно наэлектризованы. Отсюда становится понятнымъ, что всякая, градовая, или обыкновенная грозовая туча должна сопровождаться электрическими разряженіями, если она образовалась въ слѣдствіе быстраго движенія слоевъ воздуха.

Появленіе града и грозовыхъ тучъ случается на всякомъ мѣстѣ, гдѣ только условія благопріятствуютъ. Если мы часто наблюдаемъ приходящія тучи, то все таки мы должны себѣ представить, что было мѣсто, гдѣ онѣ получили свое начало. Послѣ теплыхъ и спокойныхъ дней можно нерѣдко замѣтить какъ въ высшихъ слояхъ атмосферы образуется тонкій слой облаковъ, которыя мало по малу сгущаются и принимаютъ темнѣйшій видъ. Въ это время почти незамѣтно движенія облака; но когда оно принимаетъ густой темный видъ, то есть когда толщина его достигаетъ огромныхъ размѣровъ, то появляется молнія, начинается паденіе дождя или града, и туча принимаетъ быстрое движеніе, часто независимо отъ направленія существовавшаго прежде вѣтра. Въ это время воронкообразное движеніе воздуха достигаетъ до земной поверхности, что можно замѣтить на деревьяхъ, которыхъ верхушки предъ началомъ грозы нагибаются почти отвѣсно къ землѣ, а еще болѣе на сухихъ листьяхъ, которые разлетаются въ верхъ, подобно тому, какъ разлетается песокъ, когда на него дунуть съ верху. Туча скоро проходитъ, возстановляется опять тишина, и только воздухъ оказывается холоднѣе прежняго. Это опять показываетъ, что произошло смѣшеніе верхняго холоднаго воздуха съ нижнимъ, теплымъ; тогда и верхніе слои согрѣлись, получивъ съ низу теплый воздухъ, и такимъ образомъ нарушилось прежнее условіе для образованія бури. Такое смѣшеніе слоевъ воздуха препятствуетъ новому сгущенію пара — и грозная туча проходитъ. Если же нѣтъ охлажденія нижнихъ слоевъ и упавшая дождевая вода опять скоро испаряется, то можно ожидать, что на другой день опять образуется гроза.

Изъ выше сказаннаго видно, что всѣ явленія, сопутствующія паденію града, легко объясняются по теоріи Мора; но въ ней ничего не говорится о величинѣ и формѣ градинъ, о строеніи ихъ и направленіи движенія градовой тучи.

По нашему мнѣнію слѣдовало бы соединить теорію Мора съ теоріей Дюфура, какъ разъясняющею образованіе самыхъ градинъ, и опирающеюся на опытныхъ доказательствахъ. Соединеніе обѣихъ теорій дастъ объясненіе полнѣе, которое можетъ быть распространено на всѣ возможные случаи.

Выше было уже замѣчено, что градъ появляется по истеченіи нѣсколькихъ теплыхъ и спокойныхъ дней, когда не замѣтно боковыхъ движеній, вѣтровъ, но за то существуютъ восходящіе потоки теплаго и влажнаго воздуха. Нагрѣтый воздухъ очень рѣдокъ, поэтому и подымается на значительную высоту, въ страны гдѣ слои атмосферы обладаютъ низкою температурою; тамъ онъ подвергается вліянію двухъ противуположныхъ силъ — расширенію, въ слѣдствіе уменьшеннаго давленія, и сжатію, въ слѣдствіе пониженія температуры: однако первая превозмогаетъ, то есть нагрѣтый воздухъ, подымаясь съ земной поверхности все болѣе и болѣе расширяется, и такимъ образомъ составляетъ конусо-образную фигуру, которой меньшее основаніе касается земли. Если во время дня господствовало спокойствіе въ атмосферѣ, и подымающійся теплый воздухъ не былъ переносимъ въ сторону боковыми теченіями; то на значительной высотѣ, можетъ набраться паровъ, до насыщенія, такъ что уже малѣйшая ихъ прибавка, или появившееся теченіе холоднаго воздуха, часть ихъ превращаютъ въ жидкое состояніе: тогда образуются микроскопическіе жидкіе шарики и появляется облачко. Чрезвычайно низкая температура высшихъ слоевъ атмосферы приводитъ иногда образовавшіеся водяные шарики въ замерзаніе; а это можетъ быть только въ такомъ случаѣ, когда превращеніе пара въ жидкость провсходило на большой высотѣ, гдѣ температура ниже -20^0 (ибо по опытамъ Дюфура маленькіе водяные шарики трудно превращаются въ ледъ, и можно ихъ охладить до -20^0); вышесказанныя же условія способствуютъ спокойному состоянію образовавшихся водяныхъ частицъ. Такимъ образомъ появляется въ высшихъ слояхъ атмосферы облако снѣжинокъ, имѣющихъ очень низкую температуру; съ земли можно его замѣтить по бѣлесоватому виду, и подобно флёру разостланному по небу. Когда уже разъ образовалось облако, и первая причина еще существуетъ, движеніе съ низу продолжается; то и сгущеніе паровъ тоже продолжается; но только на высотѣ сравнительно меньшей: потому что первое, снѣжное облако слегка понижается, охлаждаетъ ниже лежащіе слои воздуха и производитъ тамъ насыщеніе и пересыщеніе. Водяные шарики послѣдующаго образованія находятся подъ вліяніемъ большей уже температуры сравнительно съ прежними, а потому, могутъ оставаться жидкими, обладая однакожъ температурою ниже 0^0. Такимъ образомъ появляется облако потолще, а съ земли кажется оно темнѣе. Если боковыхъ теченій воздуха не существуетъ, и образовавшееся облако не переносится съ одного мѣста на другое, какъ это мы наблюдаемъ каждый день; то все таки прежняго спокойствія въ разсматриваемомъ нами мѣстѣ атмосферы быть не можетъ; ибо 1) превращеніе паровъ въ жидкость сопровождается уменьшеніемъ объема, образованіемъ пустоты, которую заполняетъ стремящійся со всѣхъ сторонъ воздухъ; 2) образовавшееся облако тяжелѣе воздуха, поэтому опускается въ низъ, производитъ новое превращеніе паровъ въ жидкость, новое уменьшеніе объема, и пріобрѣтаетъ все большую и большую скорость, 3) наконецъ скорость пониженія увеличивается еще по общему закону падающихъ тѣлъ. Вотъ почему первыя облака обыкновенно образуются очень медленно, а послѣдующія, замѣтныя по своему темному виду, т. е. состоящія изъ жидкихъ шариковъ, появляются очень скоро. Чѣмъ быстрѣе движется облако внизъ, тѣмъ быстрѣе движутся и верхніе холодные слои, чтобы замѣстить образовавшуюся пустоту, тѣмъ меньшій имѣютъ доступъ боковые слои. Отъ прикосновенія снѣжинокъ съ жидкими шариками происходитъ замерзаніе послѣднихъ, увеличеніе въ объемѣ отъ срастанія, и еще быстрѣйшее движеніе верхнихъ слоевъ, которые могутъ понизить температуру образовавшагося льда опять до -3^0, и -4^0 С. Въ это время въ самой сильной степени нарушается равновѣсіе: туча принимаетъ темный видъ, по краямъ неровный, клочковатый, и достигаетъ огромной толщины; такъ что нижній ея предѣлъ кажется на незначительномъ разстояніи отъ земли. Образовавшіяся градины и увеличившіяся въ объемѣ отъ прикосновенія съ другими, обладаютъ значительнымъ вѣсомъ, отъ чего падаютъ все скорѣе и скорѣе: онѣ прорѣзываютъ послѣдовательно слои тучи, образуя въ нихъ пустоту, куда съ огромною быстротою стремятся холодные слои воздуха, снова способствующіе образованію новыхъ градинъ. Вотъ отъ чего передъ самымъ паденіемъ града слышенъ особый шумъ, по выраженію нѣкоторыхъ физиковъ, похожій на тотъ, когда изъ мѣшка высыпаютъ орѣхи: этотъ шумъ происходитъ отъ столкновенія градинъ между собою, здѣсь нижніе слои тучи составляютъ какъ будто преграду, которую должны пробить первыя градины и тогда то за ними слѣдуютъ уже градины позднѣйшаго образованія. Другія явленія, сопутствующія паденію града, разсмотрѣны уже при описаніи двухъ упомянутыхъ теорій отдѣльно.

Вообще надобно полагать, что тѣмъ больше образуются градины, чѣмъ выше онѣ имѣютъ свое начало, и чѣмъ толще слой облака, чрезъ которое онѣ проходятъ; поэтому первыя градины должны быть болѣе послѣдующихъ, другими словами градъ долженъ постепенно ослабѣвать, ибо при быстромъ поступательномъ движеніи градовой тучи, нарушается прежнее спокойное образованіе градинокъ. Согласно съ этимъ взглядомъ градовая туча должна имѣть не только незначительное протяженіе, но и самое паденіе града должно постепенно ослабѣвать — не говоря уже о томъ, что туча можетъ дойти до слоевъ бѣдныхъ влагою и прекратиться.

Если превращеніе пара въ жидкость имѣетъ мѣсто на большомъ пространствѣ, то освобождающаяся при этомъ теплота, по мнѣнію Мора, достаточна для того чтобы согрѣть холодные слои; отчего града уже произойти не можетъ, а только дождь. Намъ кажется что въ этомъ объясненіи есть натяжка, ибо когда на большомъ пространствѣ происходитъ осѣданіе пара, и много теплоты освобождается, за то и большій слой воздуха долженъ нагрѣваться — то есть отношеніе остается такимъ же какъ и на маломъ пространствѣ. Здѣсь надобы различать свойство мѣстности: безводныя равнины издаютъ болѣе сухой нагрѣтый воздухъ, который не можетъ достигнуть степени насыщенія въ высшихъ предѣлахъ атмосферы; напротивъ обширная

водная поверхность, каковы огромныя озера, моря, не нагрѣваются до той степени, чтобы ихъ пары подымались на значительную высоту, въ страны очень низкой температуры. Море всегда почти покрыто туманомъ, а это и показываетъ, что уже у самой поверхности его паръ насыщается и готовъ осѣдать; если паръ не подымается на значительную высоту надъ поверхностью моря, то слѣдуетъ заключить, что на моряхъ и града образоваться не можетъ.

Самая благопріятная мѣстность для образованія града та, которая испещрена болотами и мелкими озерами, которыя во время лѣтнихъ жаркихъ дней сильно нагрѣваются и даютъ очень теплые и очень влажные потоки воздуха. Въ этомъ смыслѣ мы согласны съ г. *Фельдомъ* (см. Вѣст. М. Н. № 1 статью М. Гусева), который полагаетъ, что грозы чаще образуются въ тѣхъ мѣстахъ гдѣ много озеръ и болотъ, и приводитъ въ примѣръ Восточную Пруссію. А такъ какъ мы высказали уже тѣсную связь между обыкновенными грозными и градовыми тучами; то слѣдуетъ предположить, что тѣже самыя мѣста подлежатъ и частымъ посѣщеніямъ града.

Наконецъ остается еще нерѣшеннымъ откуда происходитъ поступательное движеніе градовой тучи? Сколько намъ извѣстно, въ сѣверномъ полушаріи направленіе движенія большею частію бываетъ съ юга на сѣверъ, или съ юговостока на сѣверозападъ, а чаще всего съ югозапада на сѣверовостокъ. По самому понятію образованія градовыхъ тучъ, движеніе ихъ должно происходить въ ту сторону, гдѣ можетъ образоваться осѣданіе пара; но мы вмѣстѣ съ тѣмъ предполагали, что спокойствіе въ атмосферѣ предшествуетъ появленію града, слѣдовательно не существуетъ постороннихъ движеній ни съ одной ни съ другой стороны. Поэтому намъ кажется, что единственная причина поступательнаго движенія можетъ заключаться въ нагрѣваніи солнца.— Когда образовалась туча, то она распространяетъ тѣнь на большое пространство, тогда она задерживаетъ и теплотворные лучи; земная поверхность частью охлаждается, и самый восходящій потокъ тоже, происходитъ насыщеніе пара и осѣданіе. Но тѣнь падаетъ всегда на сѣверную сторону, слѣдовательно и движеніе тучи должно происходить туда же. Отсюда слѣдовало бы заключить, что градовыя тучи, образующіяся до полудня должны имѣть направленіе съ юговостока на сѣверозападъ, а послѣ полудня съ югозапада на сѣверовостокъ; но подтверждается ли это заключеніе наблюденіями намъ неизвѣстно.

К. Чеховичъ.

Сравнив. статью *Кемца* о томъ же предметѣ въ его Repertorium fur Meteorologie B. II. Heft. 4. *Прим. Ред.*

Извлеченія изъ періодическихъ изданій.

1. О законѣ измѣненія плотности внутри земнаго сфероида. (Monatsber. der Berl. Acad. Octob. 1862.

Въ засѣданіи 13 Октября сообщены были Берлинской Академіи нѣкоторые интересные результаты изъ изслѣдованія Доцента Бреславльскаго Университета Др. *Липшицъ*, который обѣщаетъ въ скоромъ времени публиковать свой трудъ вполнѣ въ одномъ изъ математическихъ журналовъ.

Теорія *Клеро*, представляя землю жидкимъ эллипсоидомъ вращенія, состоящимъ изъ безконечно тонкихъ слоевъ, ограниченныхъ эллипсоидальными поверхностями, имѣющими при незначительномъ сжатіи и равномѣрной скорости вращенія общій центръ тяжести и общую ось вращенія, какъ извѣстно, приводитъ къ заключенію, что форма упоминаемыхъ слоевъ совершенно опредѣляется, какъ скоро данъ какой либо произвольный законъ измѣненія плотности отъ одного слоя къ другому, и что величины *составной* силы тяжести, дѣйствующей на какой либо пунктъ на поверхности цѣлой массы, зависитъ только отъ вида этой поверхности и нисколько отъ закона измѣненія плотностей. Но выраженіе величины этой силы содержитъ 2 постоянныя, которыя опредѣляются изъ наблюденій надъ маятникомъ въ двухъ различныхъ широтахъ; поэтому упоминаемый законъ можетъ контролироваться; ибо, при помощи теоріи, онъ долженъ давать для этихъ постоянныхъ величины, согласныя съ выводимыми изъ опытовъ; и кромѣ того, по справедливому замѣчанію Лапласа, изъ того же закона должна слѣдовать величина плотности земли на ея поверхности и величина средней плотности всего земного сфероида, опредѣленная Кавендишемъ.

Происходящія отсюда 4 уравненія, за исключеніемъ величины единицы силы протяженія, входящей въ нихъ, сводятся на три независимыя другъ отъ друга уравненія, долженствующія служить для испытанія самого закона.

Въ основаніе вывода упоминаемаго закона Лапласъ положилъ гипотезу; что увеличеніе давленія въ непосредственно слѣдующихъ одинъ за другимъ слояхъ, раздѣленное на увеличеніе плотности, пропорціонально самой плотности; и отсюда, называя b радіусъ шара, котораго поверхность была бы равна поверхности произвольно избраннаго слоя съ равномѣрною плотностію $\varphi(b)$, находитъ уравненіе

$$\varphi(b) = K\frac{\sin Lb}{b},$$

гдѣ K и L суть постоянныя. Но эти постоянныя, какъ показалъ опытъ, не могутъ быть опредѣлены такъ, чтобы онѣ вполнѣ удовлетворяли вышеупомянутымъ тремъ уравненіямъ. Поэтому, заключаетъ Г-нъ Липшицъ, съ такимъ же правомъ можно для выраженія $\varphi(b)$ избрать и всякую другую форму, напр: съ тремя постоянными, и затѣмъ изслѣдовать какъ онѣ будутъ опредѣляться посредствомъ тѣхъ же трехъ уравненій.

И такъ онъ полагаетъ

$$\varrho(b) = D - Eb^{\lambda},$$

гдѣ λ должно быть непремѣнно положительнымъ. Для опредѣленія D, E, λ служатъ данныя изъ наблюденій, а именно: ω угловая скорость вращенія, $2a$ экваторіальный поперечникъ земной поверхности, W_0 и w величины опредѣляемыя изъ опытовъ надъ маятникомъ, $\varrho(c)$ плотность земной поверхности (гдѣ c есть радіусъ шара одинаковой поверхности съ земною поверхностію) и $\xi\,\varrho(c)$ средняя плотность цѣлой земли, причемъ отношеніе ξ разсматривается какъ неправильная дробь.

Изслѣдованія автора приводятъ наконецъ къ тому, что величина λ опредѣляется трансцендентнымъ уравненіемъ и что это уравненіе можетъ имѣть только *одинъ* дѣйствительный положительный корень, и то только при исполненіи извѣстного условного неравенства, которому удовлетворяютъ и величины, извлеченныя изъ наблюденій; а въ слѣдствіе того и постоянныя D, E опредѣляются съ однимъ значеніемъ, т. е. что только одна система значеній D, E, λ удовлетворяетъ требованіямъ задачи.

Принимая для вышепоименованныхъ величинъ: ω, a, W_0, w, $\varrho(c)$ и ξ извѣстныя численныя значенія по новѣйшимъ опредѣленіямъ, авторъ находитъ такимъ образомъ величину

$$\lambda = 2{,}39$$

и для вычисленія плотности $\varrho(b)$ уравненіе

$$\varrho(b) = 9{,}453 - 6{,}953\left(\frac{b}{c}\right)^{2{,}39}.$$

Постоянныя D и E, подъ условіемъ: $\lambda > 0$ и $\xi > 1$, выходятъ всегда положительными; такъ что, начиная отъ центра земли къ поверхности ея, плотность постоянно уменьшается, между тѣмъ какъ въ томъ же направленіи сжатіе земныхъ слоевъ возрастаетъ.

Г.

2. *Краткія извѣстія.*

— Мы помѣстили въ № 34 „Вѣстника" небольшое извлеченіе, подъ заглавіемъ: »взглядъ новѣйшихъ физиковъ на механическую теорію теплоты.« Взглядъ этотъ, по нашему мнѣнію, имѣетъ то преимущество передъ всякимъ другимъ воззрѣніемъ, что онъ приводитъ всѣ извѣстные доселѣ, разнообразные источники возбужденія теплоты— къ одному общему, а именно сообщенію движенія атомамъ матеріи. Вслѣдствіе того и дѣлается не только понятнымъ, но и логически необходимымъ, почему каждая причина, нарушающая равновѣсіе атомовъ, производитъ теплоту. Такимъ образомъ ударъ, треніе, разрывъ, прохожденіе электрической искры, химическія соединенія и разложенія являются уже не разнородными, но совершенно тождественными возбудителями теплоты. Въ этомъ смыслѣ механическая теорія, что касается происхожденія солнечной теплоты, можетъ удовлетворить и каждаго астронома; но если бы, по мнѣнію физиковъ, изъ числа всѣхъ механическихъ причинъ, могущихъ произвести высокую температуру солнечной поверхности, слѣдовало отдать предпочтеніе одной, а именно: удару, безпрерывно падающихъ на солнце, малыхъ планетныхъ тѣлъ, астероидовъ; то на такое предпочтеніе астрономы вправѣ заявить, что оно ни сколько не обусловливается необходимостью и не основывается на наблюденіяхъ, слѣдовательно совершенно произвольно. Въ этомъ смыслѣ возражаетъ и Г-нъ Фэ, представившій свою записку объ этомъ предметѣ въ засѣданіе Парижской Академіи 6 Октября настоящаго года.

„Гораздо труднѣе, говоритъ онъ, чѣмъ думаютъ многіе, заставить упасть на солнце какое либо тѣло изъ небеснаго пространства. Если бы солнце было только одно и неподвижно стояло въ центрѣ міра, то паденіе притягиваемой изъ внѣ матеріи, также неподвижной, было бы возможно по прямой линіи. Но съ того времени, какъ существующее криволинейное движеніе стало общимъ явленіемъ въ матеріальномъ мірѣ, прямолинейное паденіе какого либо астероида на одно изъ многочисленныхъ центральныхъ солнцъ можетъ быть только частнымъ случаемъ, который мы допускаемъ теоритически, но которого мы никогда не наблюдали. За невозможностью допустить прямое паденіе, Томсонъ построилъ теорію, на первый взглядъ болѣе вѣроятную, а именно, что паденіе происходитъ въ слѣдствіе постепеннаго уменьшенія орбитъ отъ присутствія сопротивляющейся среды. Происхожденіе свѣта и теплоты въ солнцѣ должно быть приписано, такимъ образомъ, не удару, но тренію, которымъ старались объяснить также и обращеніе солнца на его оси. Но Г. Фэ замѣчаетъ, что онъ уже при другомъ случаѣ показалъ невозможность существованія сопротивляющейся матеріальной среды вокругъ солнца въ *спокойномъ* состояніи; если же послѣдняя находится въ движеніи, то и уменьшеніе орбитъ, кружащихся внутри оной планетныхъ тѣлъ, имѣетъ свои предѣлы. Теорія показываетъ, что въ этомъ случаѣ эксцентриситетъ, уменьшаясь съ большею скоростію, приводитъ наконецъ орбиту къ такой формѣ, при которой уменьшеніе большой оси прекращается. Но если бы даже и возможны были такія частыя паденія астероидовъ на солнечную поверхность; то все-таки гипотезѣ не достаетъ самой главной точки опоры въ наблюденіяхъ. Для того, чтобы космическая матерія своимъ треніемъ о поверхность солнца могла произвести требуемое количество теплоты необходимо допустить, что она сама приходитъ при этомъ въ раскаленное состояніе, и въ такомъ видѣ она должна болѣе или менѣе покрывать всю поверхность солнца. Внимательное и продолжительное наблюденіе солнечныхъ пятенъ противорѣчитъ такому заключенію. Спокойное состояніе солнечныхъ облаковъ, наблюдаемыхъ во время затмѣній представляется столь же несогласнымъ съ тѣмъ состояніемъ солнечной атмосферы, какое бы должна произвести космическая матерія приближающаяся къ поверхности солнца съ столь огромною скоростью, что она въ теченіи трехъ часовъ могла бы обѣжать вокругъ солнца."

— Уже давно извѣстно, что притягательная сила электромагнитовъ, при слабыхъ токахъ, возрастаетъ непропорціонально съ увеличеніемъ діаметра желѣзныхъ цилиндровъ. Опытъ показалъ также, что употребленіе пустыхъ цилиндровъ или трубокъ доставляетъ электромагниты, дѣйствующіе сравнительно сильнѣе. Г. Дюмон-

сель, стараясь подтвердить эти замѣчанія опытами, пришелъ сначала къ противоположному результату; Но заключая, что вѣроятная причина этого явленія зависитъ отъ величины полярной поверхности, производящей притяженія, которая въ трубчатыхъ магнитахъ гораздо менѣе, онъ произвелъ другой рядъ опытовъ, и дѣйствительно убѣдился, что болѣе значительное притяженіе сплошныхъ цилиндровъ не зависитъ отъ массы желѣза, но единственно отъ того, что притягательная поверхность обширнѣе. Вводя въ пустой цилиндръ другой сплошной, но такъ, чтобы оконечность его отстояла на 5 милиметровъ отъ полярной поверхности трубки, не было замѣчено ни малѣйшаго увеличенія въ дѣйствіи этого электро-магнита. Напротивъ того, простой желѣзный дискъ въ 5 миллиметровъ толщины, но помѣщенный наравнѣ съ полярною поверхностію, былъ достаточенъ для того, дабы увеличить притягательную силу электромагнита почти на одну треть и сдѣлать его равносильнымъ сплошному цилиндру. Эти замѣчанія имѣютъ практическую важность, въ особенности для электро-магнитовъ большихъ размѣровъ.

Трубчатые цилиндры уже давно вошли въ употребленіе въ механическихъ мастерскихъ въ Германіи. Эти трубки обыкновенно еще разрѣзываются съ одной стороны по длинѣ: цѣль такого устройства, какъ утверждаютъ та, чтобы уменьшить такъ-называемое residium; но на какихъ опытахъ основано это послѣднее утвержденіе намъ не извѣстно. *Г.*

Извлеченіе изъ письма Г-на Износкова.

Извѣстно, что алгебраическое выраженіе:

$$(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_m)^n - (u_1^n + u_2^n + u_3^n + \ldots + u_m^n)$$

дѣлится безъ остатка на n, то есть:

$$(1)\quad \frac{(u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_m)^n - (u_1^n + u_2^n + u_3^n + \ldots + u_m^n)}{n} = K_n\,,$$

гдѣ K_n цѣлое. Полагая: $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_m = S$ и давая въ (1) выраженіи n послѣдовательныя значенія: 2, 3, 4 . . . получимъ:

$$\frac{S^2 - (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \ldots + u_m^2)}{2} = K_2$$

$$\frac{S^3 - (u_1^3 + u_2^3 + u_3^3 + \ldots + u_m^3)}{3} = K_3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

а отсюда не трудно видѣть, что:

$$1 + S + S^2 + S^3 + \ldots + S^n - (1 + u_1 + u_1^2 + \ldots + u_1^n) - (1 + u_2 + u_2^2 + \ldots + u_2^n) \ldots - (1 + u_m + u_m^2 + u_m^3 + \ldots + u_m^n) = K$$

или: $$\frac{1-S^{n+1}}{1-S} - \left[\frac{1-u_1^{n+1}}{1-u_1} + \frac{1-u_2^{n+1}}{1-u_2} + \ldots + \frac{1-u_m^{n+1}}{1-u_m}\right] = K\,,$$

что справедливо для какой бы то ни-было строки.

На основаніи (1) выраженія имѣемъ также:

$$\frac{(1 + a + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n-1})^m - (1 + a^m + a^{2m} + a^{3m} + \ldots + a^{n-1,m})}{m} = K\,;$$

или: $$\frac{\left(\frac{1-a^n}{1-a}\right) - \left(\frac{1-a^{mn}}{1-a}\right)}{m} = K\,.$$

А отсюда: $$(1-a^n)^m - (1-a)^{m-1} + a^{mn}(1-a)^{m-1} = K(1-a)^n\, m\,,$$

или: $$(1-a^n)^m \equiv (1-a)^{m-1} \quad (\text{mod. } m)\,,$$

$$(1-a^n)^m \equiv a^{mn}(1-a^{m-1}) \quad (\text{mod. } m)\,,$$

$$a^{mn} \equiv 1 \quad (\text{mod. } m)\,.$$

Не слѣдуетъ ли отсюда теорема Фермата?

Типографія А. Марциновскаго. — ВИЛЬНО. 1862 г. Декабря 22-го. — Редакторъ-Издатель *М. Гусевъ.*